

# REPREZENTAREA GRAFICELOR

## 1. Ce este un grafic

Graficul este o reprezentare, prin desen, a unei mărimi fizice, a variației unei mărimi sau a raportului dintre două sau mai multe mărimi variabile în funcție de o altă mărime fizică. În matematică, graficul este cunoscut ca reprezentarea unei funcții în funcție de anumite coordonate specifice. În fizică mărimile reprezentate au o semnificație aparte, pentru că una din ele trebuie să fie dependentă de altă mărime fizică. Astfel, graficul este o măsură vizuală, sub forma unei curbe, a principiului legăturii dintre cauză și efect, care de cele mai multe ori nu este altceva decât o lege fizică. Acest principiu deosebește o reprezentare grafică a mărimilor fizice de o reprezentare matematică. În fizică o cauză poate să aibă un singur efect, dar un efect poate să fie produs de mai multe cauze.

Avantajele reprezentării rezultatelor măsurătorilor și a legăturilor dintre mărimile fizice pot să fie enumerate pe scurt, astfel: i) ușurează compararea valorilor mărimilor fizice reprezentate; ii) permit o referire rapidă și ușoară la date; iii) scot în evidență unele caracteristici (maximele, minimele, periodicitatea, variații neobișnuite); iv) ușurează sesizarea unor relații între mărimile fizice reprezentate; v) permit, prin interpolare și/sau extrapolare, aflarea valorii uneia dintre mărimile fizice reprezentate la valori care nu au fost măsurate; vi) permit punerea în evidență a erorilor de măsură și de calcul.

## 2. Formatul graficelor

Graficele de interes pentru lucrările efectuate în laboratorul de fizică se reprezintă pe hârtie milimetrică (Fig. 1). Aceasta poate fi achiziționată, de exemplu, ca foii de mărimea A4 (21 cm x 29.7 cm). Folosirea pentru o reprezentare grafică a unei foi întregi A4 este acceptată dar nu este recomandată (graficele sunt prea mari). Dimensiunile ideale pentru hârtia milimetrică destinată reprezentării graficelor asociate lucrărilor de laborator din laboratorul de fizică este A5 (jumătate din A4). Nu se recomandă grafice care sunt reprezentate pe o hârtie milimetrică mai mică decât A5.

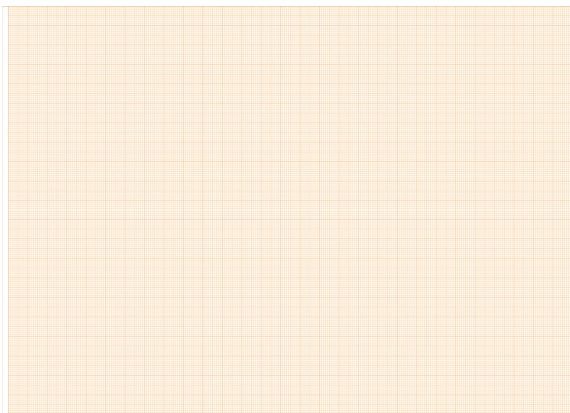


Figura 1.

În continuare vom considera ca și dimensiune pentru hârtia milimetrică formatul A5 (14.9 cm x 21 cm). Dimensiunea graficului nu este dată numai de dimensiunea hârtiei milimetrice ci și de alegerea judicioasă a reprezentării axelor de coordonate.

### 3. Axele de coordonate și originea

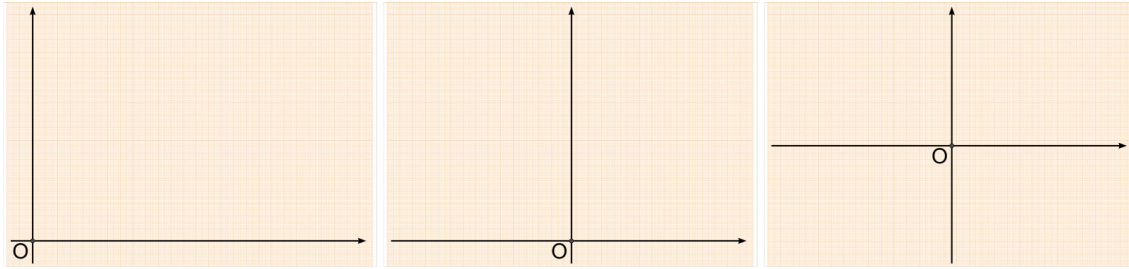


Figura 2.

În reprezentările bidimensionale avem două axe de coordonate. Alegerea originii axelor de coordonate nu este arbitrară. Aceasta depinde de datele experimentale care trebuie să fie reprezentate. Astfel, dacă toate datele experimentale au valori pozitive, atunci originea sistemului de coordonate se alege în partea stânga-jos a hârtiei milimetrice (vezi Fig. 2 stânga). Atenție, axele de coordonate nu se trasează direct pe limita inferioară sau respectiv pe limita din stanga a hârtiei milimetrice. Motivul este acela că, sub axa orizontală și în stânga axei verticale vor fi reprezentate numerele care reprezintă scala fiecărei axe. Deci, în această situație, originea sistemului de coordonate se alege pornind din colțul stânga-jos și se merge spre centru cu 1-2 cm și pe orizontală și pe verticală.

Dacă, datele independente (cele reprezentate pe axa orizontală) au valori pozitive și negative atunci axa verticală se reprezintă aproape de centrul hârtiei milimetrice (vezi Fig. 2 mijloc). În general dacă mărimile independente și cele dependente au valori pozitive și negative atunci centrul axelor de coordonate se alege în centrul hârtiei milimetrice (vezi Fig. 2 dreapta).

### 4. Reprezentarea mărimilor dependente și a celor independente

Următoare problemă este alegerea mărimilor fizice care se reprezintă pe axele orizontală și verticală. Alegerea acestora se poate supune mai multor reguli și cerințe. De exemplu, se poate cere ca să reprezentăm mărimea fizică  $M$  în funcție de mărimea fizică  $\alpha$  într-o propoziție de forma „să se reprezinte grafic  $M = f(\alpha)$ ” sau  $M(\alpha)$ . În acest caz este clar că pe axa orizontală vom reprezenta mărimea fizică  $\alpha$  iar pe axa verticală mărimea  $M$ .

Dacă nu avem specificată o cerință clară, ca cea prezentată în paragraful anterior, și avem mărimile fizice  $M$  și  $N$  atunci putem să vedem dacă mărimile  $M$  sau  $N$  sunt mărimi independente. De exemplu, dacă mărimea fizică  $M$  este *timpul* atunci este evident că aceasta nu poate să fie decât o mărime independentă și se reprezintă pe axa orizontală. Curgerea timpului în Univers este independentă de observațiile noastre, uneori chiar de existența noastră ca observatori. Mărimea fizică  $N$  trebuie să fie atunci dependentă de mărimea independentă și se reprezintă pe axa verticală.

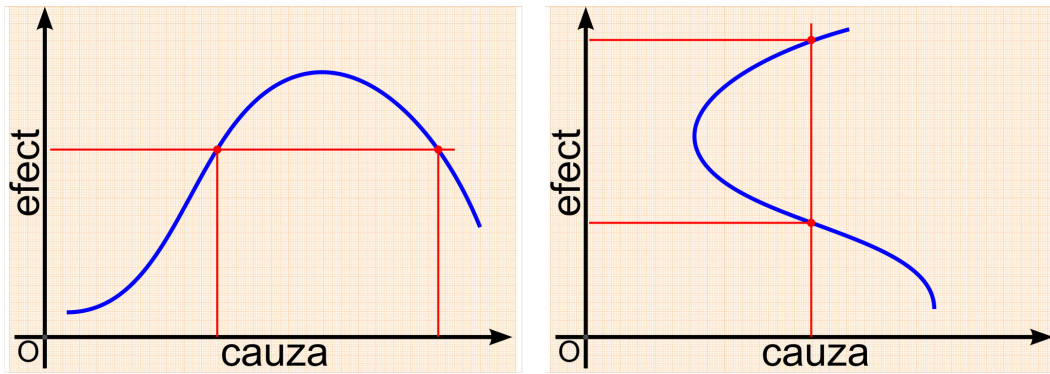


Figura 3.

Un ultim caz este acela în care ambele mărimi pot să fie dependente una de cealaltă. În acest caz trebuie să urmărim mersul lucrării și să observăm care dintre cele două mărimi este cauza și care efectul. Evident că pentru efect, fiind dependent de cauză, valorile acestuia sunt obținute în funcție de mărimea cauzei. Deci mărimea fizică identificată ca și cauză este reprezentată pe orizontală iar mărimea fizică identificată ca și efect al acestei cauze este reprezentată pe verticală.

În Figura 3 se demonstrează faptul că graficele cu sens fizic sunt diferite de reprezentările grafice matematice. Matematic ambele reprezentari din Fig. 3 sunt posibile. Din punct de vedere fizic doar figura din stânga are sens. Astfel două valori diferite ale cauzei pot să ducă la aceeași valoare a efectului. În schimb, o valoare bine determinată a mărimii fizice numită cauză nu poate să ducă în același timp la două valori diferite a mărimii fizice efect. Din acest motiv grafice de genul celui reprezentat în Figura 3 dreapta nu pot să aibă sens fizic.

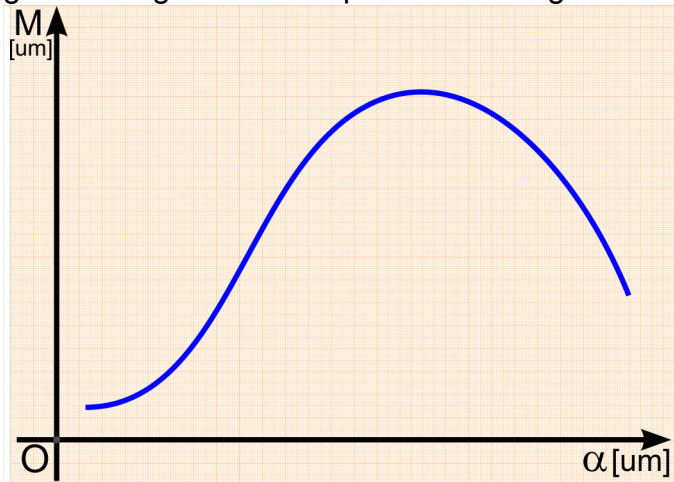


Figura 4.

Pe axe trebuie să se treacă atât mărimea fizică cât și unitatea de măsură a acesteia. Pozițiile acestora sunt indicate în Fig. 4. Mărimile fizice se reprezintă aproape de vârful săgeților axelor iar unitățile de măsură în apropierea mărimilor fizice. Pentru mărimea reprezentată pe orizontală unitatea de măsură se trece sub axa orizontală iar pentru mărimea fizică reprezentată pe axa verticală aceasta se trece în

stânga axei verticale. Se are grijă ca mărimile fizice și unitățile de măsură ([um] în figura 4) să nu depășească vârfurile săgeților axelor.



### 5. Alegerea scalei de reprezentare a axelor

Alegerea scalei unui grafic trebuie să satisfacă atât aspecte estetice cât și de bună vizibilitate și de minimizare a erorilor. De aceea un grafic trebuie să acopere cât mai mult posibil zona de reprezentare.

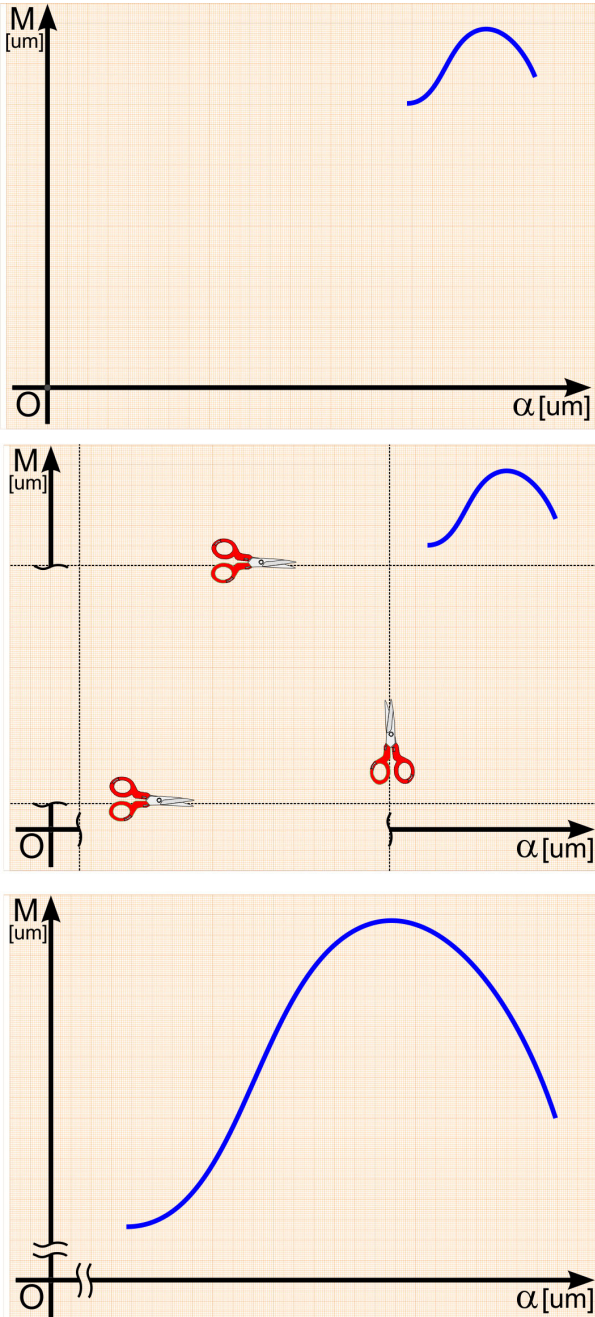


Figura 5.

În Fig. 5 sus este *deseinat* un grafic care nu acoperă toată zona de reprezentare. În acest caz axele au fost alese în mod corespunzător dar scala nu. Graficul este prea mic și izolat într-un colț al hârtiei milimetrice. Este echivalent cu un grafic reprezentat pe o hârtie milimetrică de o dimensiune mult mai mică decât cea corespunzătoare sau cu o alegere incorectă a axelor de coordonate. O astfel de reprezentare este frecventă atunci când studenții consideră că trebuie să treacă direct valorile din tabel, obținute ca urmare a măsurătorilor efectuate, pe axele graficului (de exemplu atunci când mărimea fizică  $\alpha$  este temperatura exprimată în grade K iar măsurătorile au fost efectuate la temperatura camerei). Rezolvarea problemei este simplă și constă în tăierea imagină a hârtiei milimetrice pe linia punctată așa cum se arată în Fig. 5 mijloc (tăierea efectivă a hârtiei milimetrice nu duce la rezolvarea problemei). După tăiere se consideră că părțile din mijloc sunt eliminate și marginile hârtiei milimetrice (care conțin elementele grafice de interes: axele și curba de dependență) sunt lipite. Tăierea imagină ne permite ca să mărim curba de reprezentat iar graficul ocupă întreaga zonă de reprezentare (vezi Fig. 5 jos).

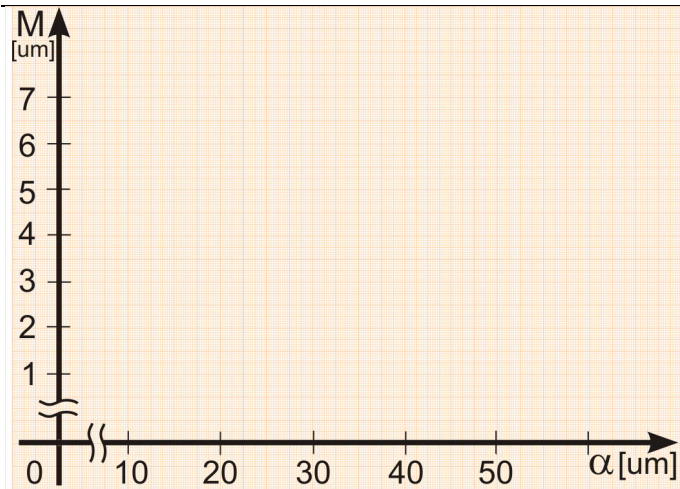


Figura 6.

Următorul pas este alegerea valorilor scalelor axelor. Aceste valori trebuie să fie reprezentate pe grafic la intervale echidistante și sunt caracterizate de un pas constant. Acest pas este legat de numere „rotunde” cum sunt cele ale puterilor lui 10. Acest lucru înseamnă că, la un moment dat, reprezentând mai multe valori trebuie să obținem numere care reprezintă puterile lui 10. Acest lucru este posibil dacă pasul însuși este

dat de divizorii lui 10, adică 1, 2, 5 și 10 (vezi Fig. 6). Acest lucru se întâmplă și dacă considerăm combinații (prin înmulțire sau diviziune) ale acestor divizori. Câteva exemple de astfel de pași de reprezentare combinați ar fi: i) 5 înmulțit cu 5 obținând 25 cu seria 25, 50, 75, 100 etc.; ii) 2 înmulțit cu 10 obținând 20 cu seria 20, 40, 60, 80, 100 etc.; iii) 2 împărțit la 10 obținând 0.2 cu seria 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0 etc. Câteva exemple de pași de reprezentare greșit aleși ar fi: i) 3 cu seria 3, 6, 9, 12 etc, unde se vede că s-a trecut peste valoarea 10 fără a fi reprezentată; ii) 7 cu seria 7, 14, 21 etc, unde se vede că s-a trecut de valorile 10 și 20. Motivul pentru care acești pași sunt aleși în legătură cu puterile lui 10 este legat de periodicitatea liniilor de pe hârtia milimetrică care este de 1 cm adică 10 mm. Astfel asocierea valorilor mărimilor fizice reprezentate grafic cu unitățile fizice de pe hârtia milimetrică trebuie să respecte aceleași reguli. Pasul pe hârtia milimetrică este tot legat de divizorii lui 10 (vez Fig. 6). Nu vom asocia niciodată, de exemplu, un interval de 2 unități ale mărimi  $\alpha$  cu 3 mm de pe hârtia milimetrică. În același timp trebuie să nu confundăm, de exemplu 10 unități ale mărimii  $\alpha$  care ar putea să fie reprezentate ca 10 mm de pe hârtia milimetrică cu 10 unități ale mărimii  $M$  care pot să fie reprezentate pe hârtia milimetrică cu 50 mm.

Numărul minim de valori reprezentate pe scală este 3 iar numărul maxim este ales astfel încât să avem o reprezentare *frumoasă*, adică numerele să fie aerisite să nu se suprapună unul peste altul. De asemenea aceste valori nu trebuie să se suprapună peste alte elemente grafice, cum ar fi axele și unitățile de măsură. Poziția valorilor se marchează pe axă cu o linie mică perpendiculară pe axa respectivă. Valorile reprezentate nu trebuie să conțină în mod obligatoriu și valori ca 10, 100 etc. Valoarea minimă trecută pe axă trebuie să fie cât mai aproape de origine, de obicei în dreptul marcajelor de ordinul centrimetrilor (10 mm) iar cea mai mare valoare cât mai apropiată de vârful săgeții dar să nu se suprapună peste mărimea fizică. Eventual se poate renunța la inscripționarea ultimei valori și dacă este loc se poate marca poziția printr-o linie mică

perpendiculară pe axă (vezi Fig. 6). Valoarea minimă care se reprezintă pe hârtia milimetrică nu este întotdeauna și prima valoare din tabelul cu date. Poate să fie o valoare mai mică decât aceasta. La fel și valoarea maximă poate să fie o valoare mai mare decât valoarea maximă din tabel. Valorile minime și maxime reprezentate pe grafic sunt de fapt limitele domeniului de reprezentare iar valorile de reprezentat trebuie să se regăsească în interiorul acestui domeniu. De obicei, pentru o reprezentare cât mai bună (erori mici de reprezentare și de citire) se încearcă maximizarea acestui domeniu. Cu toate acestea există cazuri în care domeniul în care avem valori experimentale să fie mai mic decât domeniul pe care se reprezintă. Un astfel de domeniu extins se utilizează atunci când se cere o extrapolare a dependenței mărimilor fizice în afara datelor măsurate și care de obicei se poate face dacă se cunoaște și o lege fizică de dependență între cele două mărimi fizice reprezentate grafic.

## 6. Reprezentarea valorilor pe grafic

După ce hârtia milimetrică arată ca în Figura 6, suntem pregătiți pentru a reprezenta prin simboluri grupul de valori  $(\alpha_i, M(\alpha_i))$ , unde indicele  $i$  parcurge datele de reprezentat și care apar de obicei în tabel, la fiecare lucrare de laborator (vezi Fig. 7).

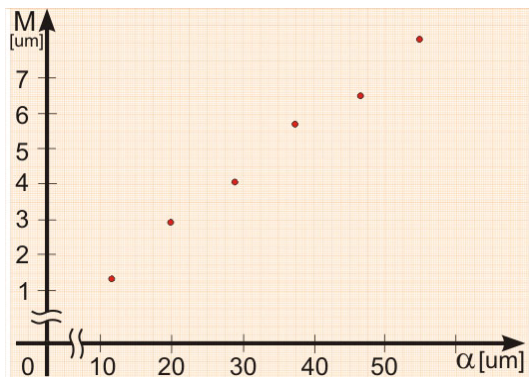


Figura 7.

Simbolurile pot să fie diferite: ceruțele pline sau goale, x-uri, pătrate, stelute, etc. Acestea trebuie să aibă o dimensiune potrivită astfel încât să fie suficient de mari pentru a fi clar vizibile de la distanța de citire dar nu exagerat de mari. Astfel, este posibil ca simbolurile să acopere mai mulți milimetri care vor reprezenta și eroarea de reprezentare grafică. Aceasta nu trebuie confundată cu alte erori de măsură.

## 7. Erorile de măsură și aproximarea datelor

Erorile de măsură și de calcul pot să fie reprezentate cu bare de eroare. De obicei acestea se consideră pentru mărimea fizică dependentă (vezi Fig. 8) și apar ca bare de eroare verticale. Nu este exclus însă să fie considerate și pentru mărimea fizică independentă și atunci ar apărea ca bare de eroare orizontale.

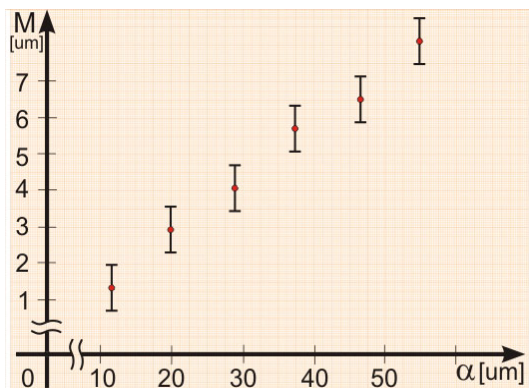


Figura 8.

Pentru toate lucrările de laborator din laboratorul de fizică, în reprezentarea grafică, se consideră doar erorile mărimilor dependente. De cele mai multe ori aceste erori nu sunt reprezentate pe



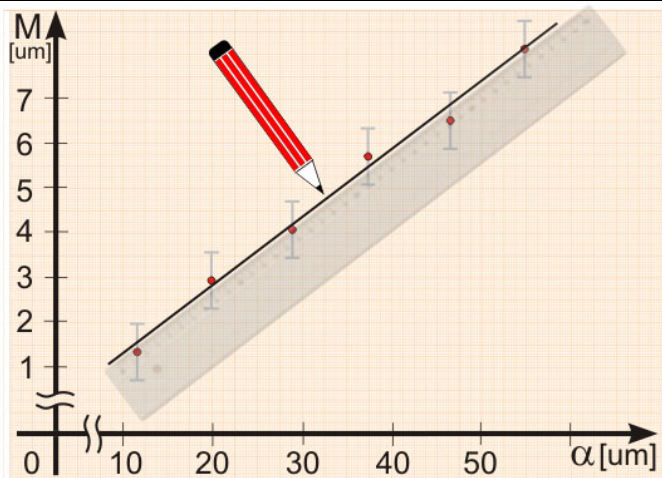


Figura 9.

grafic cu bare de eroare. Trebuie ținut cont de acestea doar atunci când se cere aproximarea datelor.

Aproximarea (sau mai comun fitarea) datelor experimentale este un procedeu des întâlnit în reprezentările grafice. Este bazată pe o lege fizică care descrie dependența dintre cele două mărimi fizice reprezentate grafic și poate să conducă la mai multe finalități: i) observarea unei dependențe liniare (acolo unde este cazul)

între cele două mărimi fizice; ii) interpolarea punctelor și citirea relațiilor dintre mărimile dependentă și cea independentă la valori care nu au fost măsurate experimental; iii) extrapolarea unor valori în afara domeniului de măsură (acest lucru trebuie făcut cu grijă iar extrapolarea de obicei nu implică și diferențe foarte mari între punctele extrapolate și domeniul în care au fost măsurate); iv) calculul pantei graficului care are semnificație fizică și care duce implicit și la o mediere a valorilor experimentale. În reprezentările grafice este foarte dificil de a trasa curbe polinomiale de ordin 2 sau mai mare, exponențiale sau logaritmice. În schimb acest lucru este ușor de realizat dacă este vorba de a folosi calculatorul pentru astfel de fitări. De aceea în laboratorul de fizică se vor cere doar aproximări ale datelor reprezentate pe hârtie milimetrică care să presupună fitari liniare (vezi Fig. 9).

Dacă legea fizică care leagă cele două mărimi fizice reprezentate în grafic presupune o dependență liniară a unei mărimi fizice față de cealaltă, atunci de cele mai multe ori se cere ca punctele experimentale să fie approximate liniar, reprezentarea din Fig. 9. Așa cum am văzut datele experimentale sunt afectate de erori, de aceea fitarea liniară va presupune trasarea unei singure linii care să aproximeze liniar punctele experimentale. *Nu se unesc punctele unele cu altele! Nu se urmărește a se uni primul punct cu ultimul!* Pentru aproximarea liniară este nevoie de un liniar (riglă) transparent, care se așează peste punctele experimentale. Se urmărește ca numărul de puncte de o parte și de alta a liniei care aproximează datele experimentale să fie aproximativ egal și în același timp distanța de la fiecare punct la linia care fitează datele să fie cât mai mică. Faptul că liniarul este transparent ne ajută să observăm și punctele peste care se așează liniarul și să apreciem numărul de puncte de o parte și de alta a liniei de fitare. Aceasta se trasează cu creionul așa cum se poate vedea și în Fig. 9. Dreapta care fitează datele experimentale poate să nu treacă prin nici un punct experimental dar aceasta trebuie să treacă printre liniile orizontale ale barelor de eroare pentru fiecare punct experimental. Acest lucru va fi presupus teoretic,

deoarece practic nu se cere ca barele de eroare (desenate șters în Fig. 9) să fie reprezentate pentru punctele experimentale.

### 8. Panta graficelor liniare

Panta graficelor cu dependență liniară are o semnificație aparte. Dacă presupunem că o mărime fizică  $M$  depinde de o alt mărime fizică  $m$  printr-o dependență liniară de forma:

$$M = \alpha \cdot m + \beta, \quad (1)$$

atunci panta graficului este dată de mărimea  $\alpha$  care nu are sens de unghi, ci are semnificația unei mărimi fizice dată de:

$$[\alpha]_{SI} = \frac{[M]_{SI}}{[m]_{SI}}, \quad (2)$$

și se calculează ca tangenta la grafic.

Din punct de vedere practic pentru calculul pantei unui grafic se urmăresc cațiva pași: i) se aleg două puncte de pe linia care fitează punctele experimentale cât mai îndepărtate pentru a reduce erorile și se notează cu (1) și (2) așa cum se arată în Fig. 10; ii) se citesc coordonatele  $(m_1, M_1)$  și  $(m_2, M_2)$  ale celor două puncte de pe grafic; iii) cu ajutorul relației:

$$\alpha = \operatorname{tg}(\theta) = \frac{M_2 - M_1}{m_2 - m_1}, \quad (3)$$

se calculează panta graficului sau tangenta acestuia. Având semnificație fizică, rezultatul va fi însoțit de unitățile de măsură corespunzătoare.

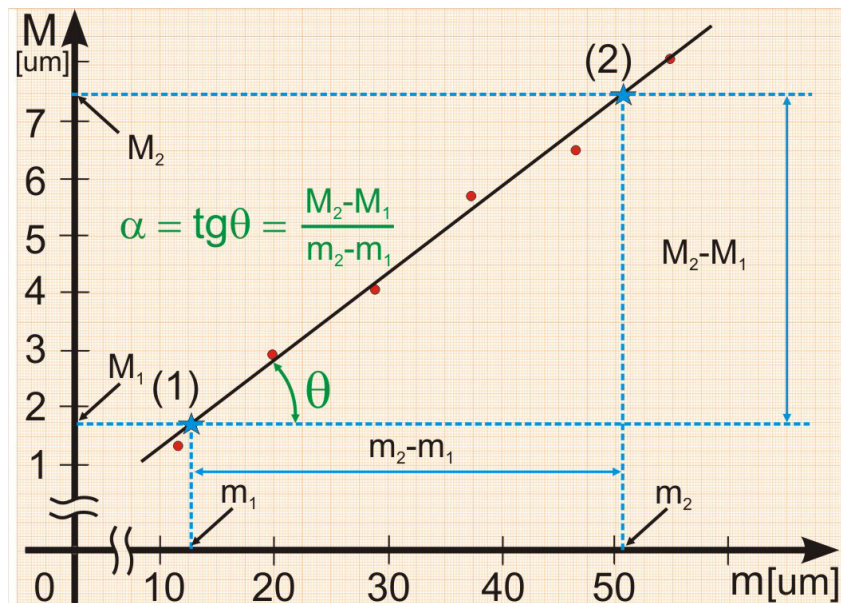


Figura 10.